NO DATE

$Q(x) = a(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2} \dots (x-a_k)^{n_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{m_1} \dots (x^2+\beta_\lambda x+\gamma_\lambda)^{m_\lambda}$
όπου $a_1 \dots a_k$ οι πραγματικές ρίζες
του $Q(x)$ (n_i η πολλαπλότητα της ρίζας a_i)
και καθένα από τα $x^2+\beta_j x+\gamma_j$ έχει
αρνητική διακρίνουσα ($\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$)
$n_1 + n_2 + \dots + n_k + 2m_1 + \dots + 2m_\lambda = \deg(Q(x))$

04/05/17

(⇓ Συνέχεια βημάτων.)

3ο Βήμα: Ανάλυση σε απλά κλάσματα.
Αν $Q(x)$ όπως παραπάνω και $\deg P(x) < \deg Q(x)$
τότε: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_{11}}{x-a_1} + \dfrac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \dfrac{A_{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} +$

$+ \dfrac{A_{21}}{x-a_2} + \dots + \dfrac{A_{2n_2}}{(x-a_2)^{n_2}} + \dots \dots + \dfrac{A_{k1}}{x-a_k} + \dots + \dfrac{A_{kn_k}}{(x-a_k)^{n_k}}$

$+ \dfrac{B_{11}x+\Gamma_{11}}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + \dots \dots + \dfrac{B_{1m_1}x+\Gamma_{1m_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{m_1}} + \dots \dots +$

$+ \dfrac{B_{\lambda 1}x+\Gamma_{\lambda 1}}{x^2+\beta_\lambda x+\gamma_\lambda} + \dots + \dfrac{B_{\lambda m_\lambda}+\Gamma_{\lambda m_\lambda}}{(x^2+\beta_\lambda x+\gamma_\lambda)^{m_\lambda}}$

Πως βρίσκουμε τους συντελεστές στους αριθμητές;

NO DATE

⤳ Πολλαπλασιάζοντας προκύπτει μια ισότητα πολυωνύμων με $Q(x)$. Εξισώνοντας τους συντελεστές προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα $m+1$ εξισώσεων με $m+1$ αγνώστους όπου $m = Q(x)$.

4ο Βήμα. Ολοκλήρωση των επιμέρους όρων

⤳ 4α) Ολοκλήρωση όρω της μορφής $\int \frac{1}{(x-a)^k} dx$.

Για $k=1$: $\int \frac{1}{x-a} dx = \log|x-a| \begin{cases} \log(x-a) \\ \log(a-x) \end{cases}$

Για $k \geq 2$: $\int \frac{1}{(x-a)^k} dx = -\frac{1}{(k-1)} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + c$

⤳ 4β) Ολοκλήρωση όρω της μορφής $\int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\beta x+\gamma)^k} dx$

Το $Bx+\Gamma$ είναι γραμμικός συνδυασμός του πολυωνύμου του $2x+\beta$ (που είναι η παράγωγος του $x^2+\beta x+\gamma$) και του πολυωνύμου 1.

$Bx+\Gamma = K(2x+\beta) + \Lambda \cdot 1 = 2Kx + \beta K + \Lambda$.

Αρα $\begin{cases} B = 2K \\ \beta K + \Lambda = \Gamma \end{cases} \iff \begin{cases} K = \frac{B}{2} \\ \Lambda = \Gamma - \frac{\beta}{2} B \end{cases}$

Ετσι $Bx+\Gamma = \frac{B}{2}(2x+\beta) + \left(\Gamma - \frac{\beta \cdot B}{2}\right)$

NO DATE

Ετσι αναγόμαστε στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων:

$$I_1 = \int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)}\,dx \quad \text{και} \quad I_2 = \int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)}\,dx.$$

Το I_1 υπολογίζεται άμεσο.

(π.χ με την αντικατάσταση $y = x^2+\beta x+\gamma$ οπότε $dy = (2x+\beta)\,dx$.
αναγόμαστε στο $\int \frac{1}{y^k}\,dy = -\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{y^{k-1}}$)

Άρα $I_1 = -\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^{k-1}}$.

Για το I_2:

$$x^2+\beta x+\gamma = x^2+2\cdot\frac{\beta}{2}x+\frac{\beta^2}{4}+\gamma-\frac{\beta^2}{4}$$

$$= \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)$$

Ετσι κάνουμε την αντικατάσταση:

$$x+\frac{\beta}{2} = \sqrt{\gamma-\frac{\beta^2}{4}}\;y$$

(δηλαδή $y = \frac{x+\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\gamma-\frac{\beta^2}{4}}}$, αναγόμαστε στο

ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy$.)

Υπολογισμός του $I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k} dy$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Ξέρουμε ότι $I_1 = \arctan(y)$, οπότε αρκεί να βρούμε αναδρομικό τύπο.
Έστω $k \geq 2$.

$$I_{k-1} = \int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}} dy = \int (y)'(y^2+1)^{-(k-1)} dy$$

$$= \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} - \int y \cdot \left(-(k-1)\right) \cdot (y^2+1)^{-k} \cdot 2y \, dy$$

$$= \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \left(2(k-2) \int \frac{y^2}{(y^2+1)^k} dy\right)$$

$$= \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + (2k-2)\left(\int \frac{y^2+1}{(y^2+1)^k} dy - \int \frac{1}{(y^2+1)^k} dy\right)$$

$$= \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + (2k-2)(I_{k-1} - I_k)$$

Λύνοντας την πρωτοβάθμια εξίσωση συναρτήσει του I_k προκύπτει ότι:

$$I_k = \left(\frac{2k-3}{2k-2}\right) I_{k-1} + \frac{1}{2k-2} \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}}$$

Γράφουμε (ενδεικτικά) τους πρώτους 3 όρους της $I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k} dy$.

NO DATE

$I_1 = \arctan(y)$

$I_2 = \frac{1}{2}\arctan y + \frac{1}{2}\frac{y}{y^2+1}$

$I_3 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\arctan y + \frac{1}{2}\frac{y}{y^2+1}\right) + \frac{1}{4}\frac{y}{(y^2+1)^2}$

Παραδείγματα ανάλυσης σε απλά κλάσματα.

$$\frac{5x+3}{x^2-4} = \frac{\alpha}{(x-2)} + \frac{\beta}{(x+2)}$$

Αν θέλω να βρω τα α,β θα πάω:

$$\frac{5x+3}{x^2-4} = \frac{\alpha x+2\alpha+\beta x-2\beta}{x^2-4} = \frac{(\alpha+\beta)x+(2\alpha-2\beta)}{x^2-4}.$$

$$\frac{2x^2+5x+4}{(x-1)^3} = \frac{\alpha}{(x-1)} + \frac{\beta}{(x-1)^2} + \frac{\gamma}{(x-1)^3}$$

$$\frac{P(x)}{(x-4)(x^2+1)} = \frac{\alpha}{x-4} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+1}$$

$$\frac{P(x)}{(x+7)^3(x-2)^2} = \frac{\alpha}{(x+7)} + \frac{\beta}{(x+7)^2} + \frac{\gamma}{(x+7)^3} + \frac{\delta}{x-2} + \frac{\varepsilon}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{(x^2+4)^2(x-1)^3} = \frac{a}{x-1} + \frac{\beta}{(x-1)^2} + \frac{\gamma}{(x-1)^3} +$$

$$+ \frac{\delta x+\varepsilon}{x^2+4} + \frac{\zeta x+\eta}{(x^2+4)^2}$$

Παράδειγμα ①:

$$\int \frac{4x^2+2x+3}{(x+1)(x-2)^2}\,dx.$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα.

$$\frac{4x^2+2x+3}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{\Gamma}{(x-2)^2}.$$

$$= \frac{A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + \Gamma(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}.$$

$$= \frac{Ax^2 - 4Ax + 4A + Bx^2 - Bx - 2B + \Gamma x + \Gamma}{(x+1)(x-2)^2}$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (-4A-B+\Gamma)x + 4A-2B+\Gamma}{(x+1)(x-2)^2}.$$

Άρα :
$$\begin{cases} A+B=4 \\ -4A-B+\Gamma=2 \\ 4A-2B+\Gamma=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=4 \\ 8A-B=1 \\ 4A-2B+\Gamma=3 \end{cases}$$

NO DATE

$9A = 5 \rightsquigarrow A = \frac{5}{9}$

$B = 8A - 1 \rightsquigarrow B = B = 31/9$

$\Gamma = 3 - 4A + 2B = \frac{69}{9} = \frac{23}{3}$

Έτσι $I = \frac{5}{9}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{31}{9}\int \frac{1}{x-2}\,dx +$

$+ \frac{23}{3}\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx =$

$= \frac{5}{9}\log(|x+1|) + \frac{31}{9}\log(|x-2|) + \frac{23}{3}\cdot\frac{-1}{x-2} + C$